

## Nullstellenbestimmung von Parabeln:

### Beispiele:

1.  $y = x^2 - 10x + 16$     Bedingung:  $y = 0$   
 $x^2 - 10x + 16 = 0$

Eine quadratische Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  mit  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;  $b, c \in \mathbb{R}$  kann mit

folgender Formel gelöst werden:  $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Den Term  $(b^2 - 4ac)$  nennt man Diskriminante  $D$ .

$D > 0$ : zwei Lösungen

$D = 0$ : eine Lösung

$D < 0$ : keine Lösung

$$x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = 8 \quad N_1(8/0)$$

$$x_2 = 2 \quad N_2(2/0)$$

2.  $y = x^2 - 7x + 21$

$$x^2 - 7x + 21 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 84}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{-35}}{2}$$

$\Rightarrow$  die Parabel hat keine Nullstellen

3. Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Nullstellen der Parabel  $p: y = x^2 - 6x + k$  in Abhängigkeit von  $k$ .

$$x^2 - 6x + k = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot k}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4k}}{2}$$

1)  $36 - 4k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 9$

$p$  hat eine Nullstelle bei  $x = 3$

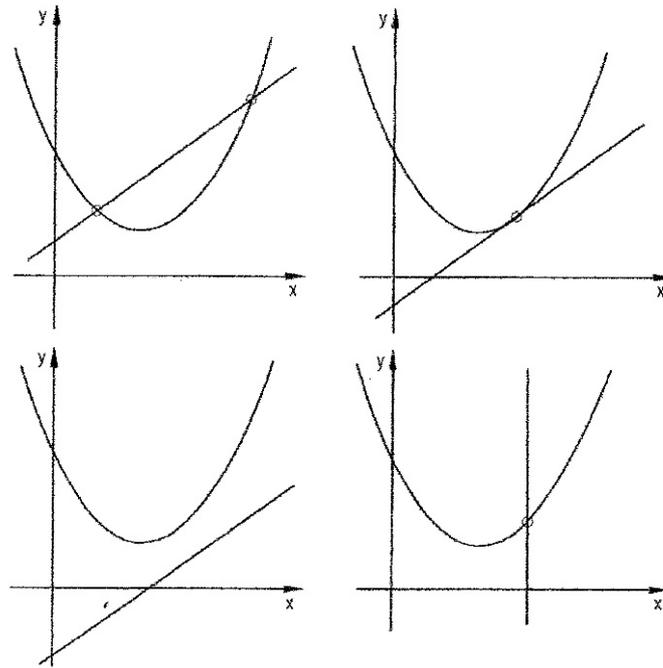
2)  $36 - 4k > 0 \quad \Rightarrow \quad k < 9$

$p$  hat zwei Nullstellen bei  $x_1 = \frac{6 + \sqrt{36 - 4k}}{2}$  und bei  $x_2 = \frac{6 - \sqrt{36 - 4k}}{2}$

3)  $36 - 4k < 0 \quad \Rightarrow \quad k > 9$

$p$  hat keine Nullstelle

### Schnittpunkte einer Parabel mit einer Geraden:



### Beispiele:

1.  $p: y = x^2 - 2x + 3$   
 $g: y = 0,5x + 1,5$

Bedingung für Schnittpunkte:  $p = g$

$$x^2 - 2x + 3 = 0,5x + 1,5 \Rightarrow x^2 - 2,5x + 1,5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{2,5 \pm \sqrt{6,25 - 4 \cdot 1 \cdot 1,5}}{2} = \frac{2,5 \pm \sqrt{6,25 - 6}}{2} = \frac{2,5 \pm \sqrt{0,25}}{2} = \frac{2,5 \pm 0,5}{2}$$

$$x_1 = 1,5 \quad x_2 = 1$$

y-Koordinaten der Schnittpunkte: x einsetzen in p (oder g)

$$y_1 = 0,5 \cdot 1,5 + 1,5 = 2,25 \Rightarrow S_1(1,5/2,25)$$

$$y_2 = 0,5 \cdot 1 + 1,5 = 2 \Rightarrow S_2(1/2)$$

2.  $p: y = 0,5x^2 - x + 1,5$

$g: y = -2x + 1$

$$0,5x^2 - x + 1,5 = -2x + 1 \Rightarrow 0,5x^2 + x + 0,5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5}}{1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 1}}{1} = -1$$

$$y = -2 \cdot (-1) + 1 = 3 \Rightarrow S(-1/3)$$

Die Gerade berührt die Parabel nur in einem Punkt.

Eine solche Gerade nennt man auch Tangente.

3. Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Parabel  $p: y = 0,5x^2 - x + 1,5$  und der Geradenschar  $g_a: y = -2x + a$  mit  $a \in \mathbb{R}$  in Abhängigkeit von  $a$ .

$$0,5x^2 - x + 1,5 = -2x + a \Rightarrow 0,5x^2 + x + 1,5 - a = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0,5 \cdot (1,5 - a)}}{1} = \frac{-1 \pm \sqrt{2a - 2}}{1}$$

1)  $2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$

ein gemeinsamer Punkt bei  $x = -1 \Rightarrow BP(-1/3)$

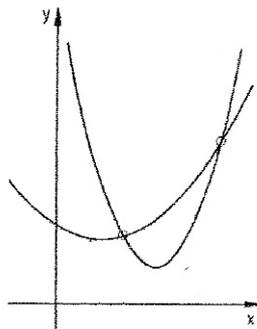
2)  $2a - 2 > 0 \Rightarrow a > 1$

zwei gemeinsame Punkte

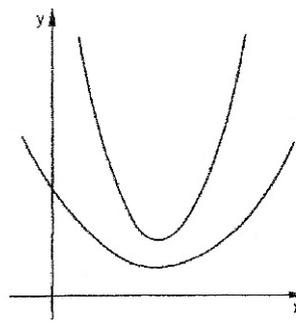
3)  $2a - 2 < 0 \Rightarrow a < 1$

kein gemeinsamer Punkt

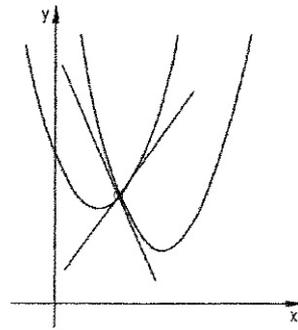
### Schnittpunkte zwischen zwei Parabeln:



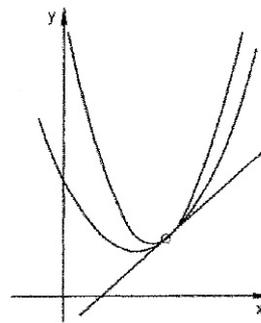
2 Schnittpunkte



0 Schnittpunkte



1 Schnittpunkt mit  
verschiedenen Tangenten



gemeinsamer Tangente

Beispiele:

1.  $p_1 : y = x^2 - x + 2,25$

$p_2 : y = 0,5x^2 + 0,5x + 1,125$

$$x^2 - x + 2,25 = 0,5x^2 + 0,5x + 1,125 \Rightarrow 0,5x^2 - 1,5x + 1,125 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1,5 \pm \sqrt{2,25 - 4 \cdot 0,5 \cdot 1,125}}{1} = \frac{1,5 \pm \sqrt{0}}{1} = 1,5$$

$$y = 1,5^2 - 1,5 + 2,25 = 3 \Rightarrow S(1,5/3)$$

Die Parabeln haben nur einen Punkt gemeinsam.

2.  $p_1 : y = -x^2 + 2x + 3$

$p_2 : y = x^2 - 4x + 3$

$$-x^2 + 2x + 3 = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow -2x^2 + 6x = 0$$

$$\Rightarrow -2x(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

$$y_1 = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow S_1(0/3)$$

$$y_2 = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0 \Rightarrow S_2(3/0)$$

3. Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Parabel  $p_a : y = -x^2 + ax + 3$  mit  $a \in \mathbb{R}$  und der Parabel  $p_2 : y = x^2 - 4x + 3$  in Abhängigkeit von  $a$ .

$$-x^2 + ax + 3 = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow -2x^2 + ax + 4x = 0 \Rightarrow -2x^2 + (a+4)x = 0$$

$$\Rightarrow x(-2x + a + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad -2x + a + 4 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}a + 2$$

1) ein gemeinsamer Punkt, wenn  $\frac{1}{2}a + 2 = 0 \Rightarrow a = -4$

$$\Rightarrow x = 0 \quad y = 3 \Rightarrow \text{BP}(0/3)$$

2) zwei gemeinsame Punkte für  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

## Lösungsverfahren für spezielle quadratische Gleichungen

### (1) Reinquadratische Gleichungen

#### Beispiele:

$$1) x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = 2$$

$$2) -kx^2 + k^3 = 0 \quad (k \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$$kx^2 = k^3 \Rightarrow x^2 = k^2 \Rightarrow x_1 = -k \quad x_2 = k$$

$$3) 2(x-t)^2 = 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(x-t)^2 = 0 \Rightarrow x-t=0 \Rightarrow x=t$$

### (2) Ausklammern

#### Beispiele:

$$1) 2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(2x-5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad 2x-5=0 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2}$$

$$2) \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 4$$

### (3) Faktorisieren

#### Beispiele:

$$1) x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

Hat die quadratische Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  die Lösungen  $x_1$  und  $x_2$ , so ist:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

(Satz von Vieta)

$$2) x^2 - 7x - 30 = 0 \Rightarrow (x-10)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 10 \quad x_2 = -3$$

$$3) x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$4) 3x^2 + 45x + 150 = 0 \Rightarrow 3(x^2 + 15x + 50) = 0 \Rightarrow x^2 + 15x + 50$$

$$\Rightarrow 3(x+5)(x+10) = 0 \Rightarrow x_1 = -5 \quad x_2 = -10$$